

Pratique Supplémentaire 11 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 6.4 6.5 6.6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soient $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ deux bases orthonormales de \mathbb{R}^n . On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ et $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

Sol.:

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{u}_1 & \vec{u}_1^T \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_1^T \vec{u}_n \\ \vec{u}_2^T \vec{u}_1 & \vec{u}_2^T \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_2^T \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n^T \vec{u}_1 & \vec{u}_n^T \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n^T \vec{u}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n. \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$. UV est inversible car $V^T U^T UV = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Exercice 2

i) Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et v un vecteur dans \mathbb{R}^n . Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_n|^2.$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille orthonormée dans \mathbb{R}^n et soit v un vecteur de \mathbb{R}^n . Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_p|^2.$$

Sol.:

i) Soit U la matrice orthogonale formée des colonnes u_i . En utilisant $UU^T = I$, on obtient

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, UU^T v \rangle = \langle U^T v, U^T v \rangle = \|U^T v\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} u_1 \cdot v \\ \vdots \\ u_n \cdot v \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i \cdot v|^2.$$

ii) On considère la projection $w = \sum_{i=1}^p \langle u_i, v \rangle u_i$ de v sur $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$. On a la décomposition $v = w + z$, avec $z \in W^\perp$. Par le théorème de Pythagore, w et z étant orthogonaux, on obtient

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

(En effet, on a $\|v\|^2 = \langle w + z, w + z \rangle = \|w\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle w, z \rangle$ et $\langle w, z \rangle = 0$).

Ensuite,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &\geq \|w\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^p \langle u_i, v \rangle u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle u_i, v \rangle \langle u_j, v \rangle u_i^T u_j \\ &= \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2 \underbrace{\|u_i\|^2}_{=1 \text{ (norm.)}} + \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \langle u_i, v \rangle \langle u_j, v \rangle \underbrace{u_i^T u_j}_{=0 \text{ (orth.)}} \\ &= \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2 \end{aligned}$$